

UNIDAD DE APRENDIZAJE III

Saberes procedimentales

1. Emplea de manera sistemática conceptos algebraicos, geométricos, trigonométricos y de geometría analítica.
2. Relaciona una ecuación algebraica con a gráfica que representa y viceversa.
3. Interpreta los parámetros o elementos de cada una de las ecuaciones de la recta.

A Familia de rectas

La ecuación de una recta queda determinada por dos condiciones independientes: dos puntos, la pendiente y un punto, o la pendiente y su intersección con el eje horizontal, o la intersección de la recta con los ejes coordenados.

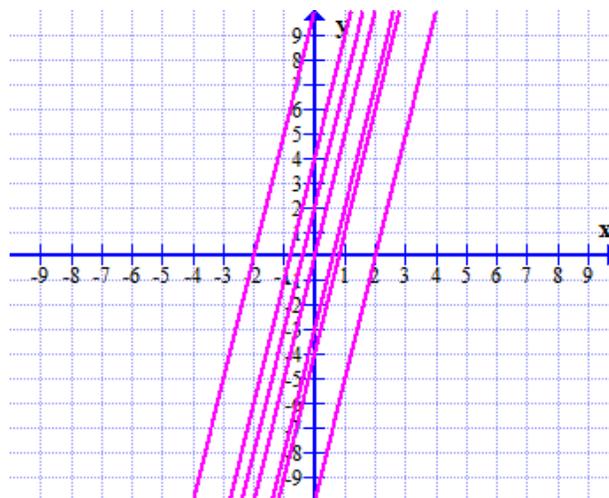
Consecuentemente, una recta cumple sólo una condición, no es una recta única, ya que hay una infinidad de rectas que satisfacen esa misma condición.

Así, se tiene que todas las rectas que cumplen con una condición geométrica determinada, forman una *familia de rectas* o un *haz de rectas*.

Consideremos la ecuación de la recta $y = mx + b$, donde las constantes m y b , son los parámetros, uno de los cuales (no ambos a la vez) se denominará con la letra K (que debe ser un número real). De modo que al asignar un valor cualquiera a uno de esos parámetros, se obtiene la ecuación de una familia de rectas.

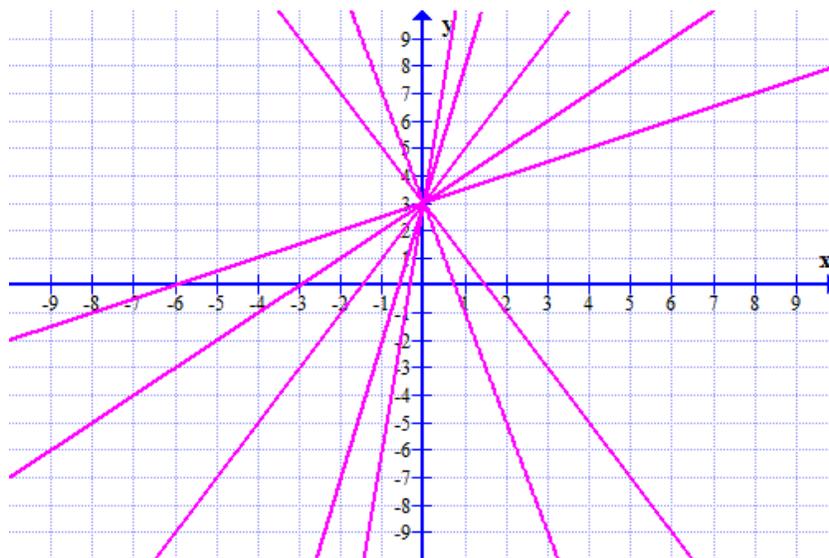
Observa el siguiente ejemplo para clarificar lo dicho.

Si $m = 5$, entonces podemos obtener la ecuación que describe la familia de rectas como $y = 5x + K$, cuya pendiente es 5, y gráficamente se tiene:



Como se aprecia en la anterior figura, se trata de una familia de rectas paralelas, ya que comparten la misma pendiente.

Por otro lado, si en la ecuación $y = mx + b$, $b = 3$, se tiene que la ecuación de la familia de rectas $y = Kx + 3$, representa a todas aquellas rectas que cruzan al eje vertical por 3, tal como se aprecia en la figura.



Discute con tus compañeros si la recta $x = 3$, puede formar parte de esta familia, y argumenta tus observaciones:

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la familia de rectas que son paralelas a la recta $4x - 7y + 8 = 0$ y realizar la gráfica correspondiente.

Se debe obtener la pendiente. Aquí $m = -A/B$, por lo que

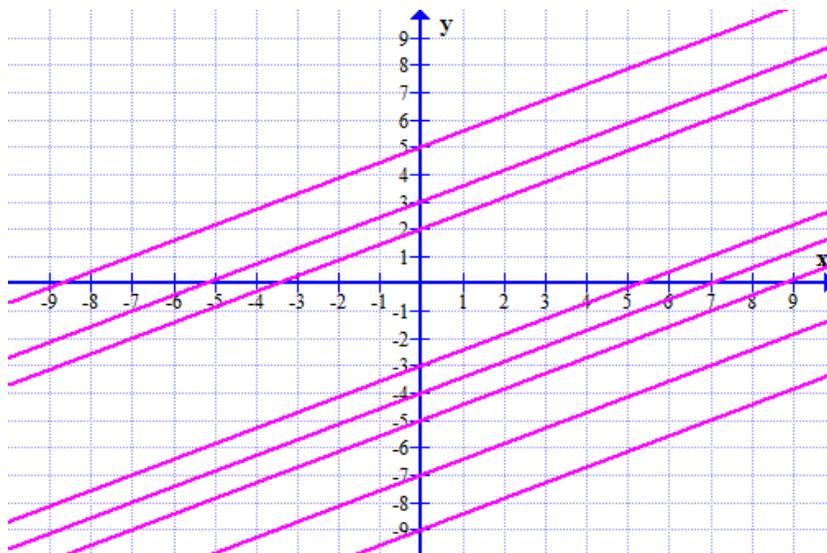
$$m = -\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Entonces, dado que m es constante, $b = K$.

Así que la ecuación de la familia de rectas paralelas a la recta $4x - 7y + 8 = 0$, es

$$y = \frac{4}{7}x + K$$

Gráficamente se tiene:



2. Escribe la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (2,1), y realiza la gráfica correspondiente.

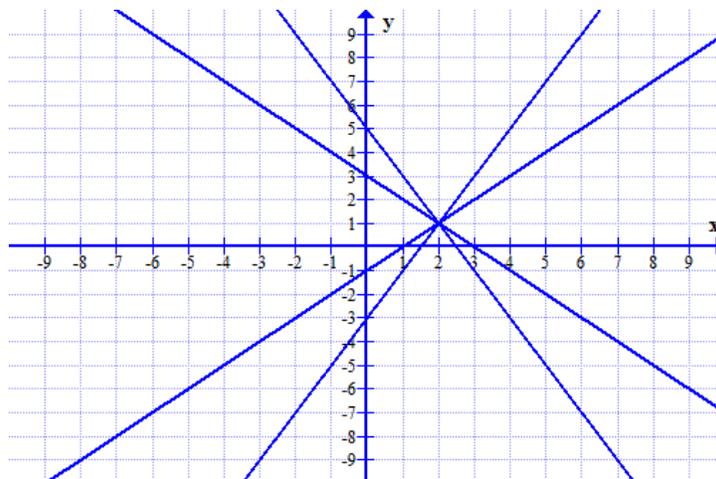
En este caso, se sabe que todas las rectas de esa familia han de pasar por un punto fijo, que es (2,1), por lo que la pendiente no es constante, y por lo tanto es el parámetro, o sea, $m = K$; así que tendremos que emplear la ecuación de la recta que tiene una pendiente y un punto dados, es decir:

$$y - y_1 = K(x - x_1)$$

Entonces, con todo lo anterior, la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (2,1) es:

$$y - 1 = K(x - 2)$$

Y se puede obtener la representación gráfica:



Ejercicios

Determina la ecuación de la familia de rectas que tienen la propiedad indicada en cada inciso. Además realiza las gráficas correspondientes (tres rectas en cada gráfica).

1. Con pendiente -1
2. Paralela a $2x - 3y + 1 = 0$
3. Pasan por (-1,5)
4. Ordenada al origen de 6 unidades.

B Punto de intersección entre rectas

Dos rectas pueden tener un punto en común o pueden no tenerlo. Cuando las rectas no tienen ese punto en común, es porque las rectas son paralelas, es decir, poseen la misma pendiente.

Por otro lado, si las rectas tienen punto en común, ese punto es el punto de intersección, y para encontrarlo se suele resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo Determinar el punto de intersección de las rectas $3x - 2y = -2$ y $5x + 8y = -60$.

Solución:

Conviene verificar si las rectas son paralelas o no lo son, si no lo son, entonces se procede a la determinación del punto de intersección, resolviendo el sistema.

$$m_1 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$
$$m_2 = \frac{-5}{8} = -\frac{5}{8}$$

Como las pendientes son diferentes, entonces sí existe el punto de intersección, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$$

Si se multiplica la primera por 4, afín de restarla con la segunda y hacer 0

$$\begin{cases} 12x - 8y = -8 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$$

De ahí que, $17x = -68$

$$x = -\frac{68}{17} = -4$$

Para encontrar el valor de y , se sustituye el valor de la x así encontrado, en la segunda ecuación:

$$5(-4) + 8y = -60$$

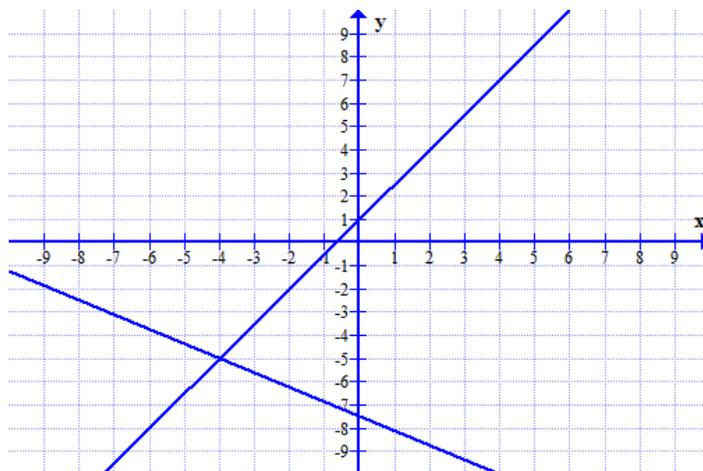
$$-20 + 8y = -60$$

$$8y = -60 + 20$$

$$8y = -40$$

$$y = -5$$

Así, las coordenadas del punto de intersección son $(-4, -5)$, tal como se puede apreciar en la gráfica.



¿Recuerdas otros métodos de solución de sistemas de ecuaciones? _____ ¿Cuáles?

Ejercicios Determinar los puntos de intersección entre los pares de rectas dados, y en cada caso realizar la gráfica correspondiente.

1.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x + 8y = 13 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 9x + 16y = 7 \\ 4y - 3x = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 14x - 11y = -2 \\ 13y + 8x = 30 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 15x - 11y = -87 \\ -12x - 5y = -27 \end{cases}$$

C Rectas y puntos notables en el triángulo

Se conocen como rectas notables de un triángulo, aquellas rectas construidas con condiciones especiales y que tienen especiales características cuando se trazan sobre los lados de un triángulo.

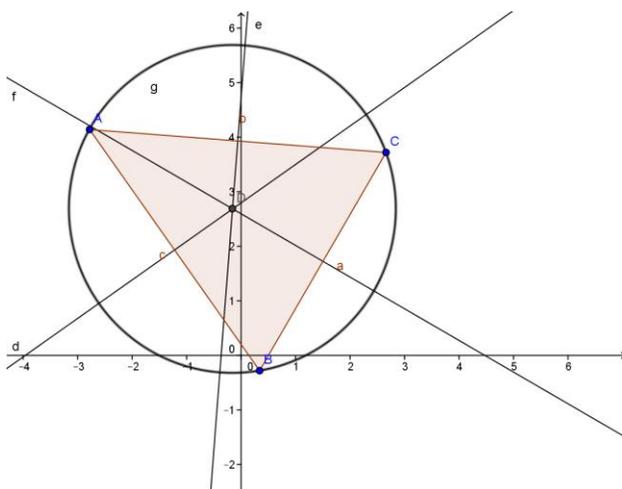
Las rectas notables del triángulo son:

1. Mediatrices
2. Medianas
3. Alturas
4. Bisectrices

Mediatriz

Una *mediatriz*, es una recta perpendicular que se traza en el punto medio de un segmento. Dentro del triángulo, las mediatrices son las rectas perpendiculares trazadas en el punto medio en cada lado de un triángulo.

El punto donde concurren las mediatrices se llama *circuncentro*, y representa el *centro de una circunferencia* que toca cada uno de los vértices del triángulo, es decir el centro de una circunferencia *circunscrita*, como se aprecia en la figura:

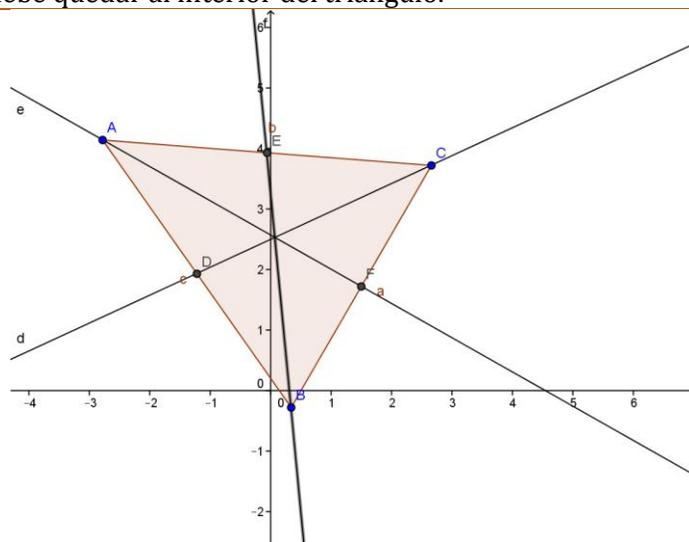


El circuncentro puede o no, quedar al interior de la circunferencia.

Mediana

Una *mediana*, es la que se traza desde el punto medio del lado de un triángulo hacia el vértice que se opone.

La concurrencia de las medianas al interior del triángulo se conoce como *gravicentro* o *baricentro*, y representa el centro de gravedad del triángulo, de modo que si se coloca un instrumento puntiagudo en este punto, el triángulo se mantendrá en equilibrio. El gravicentro debe quedar al interior del triángulo.

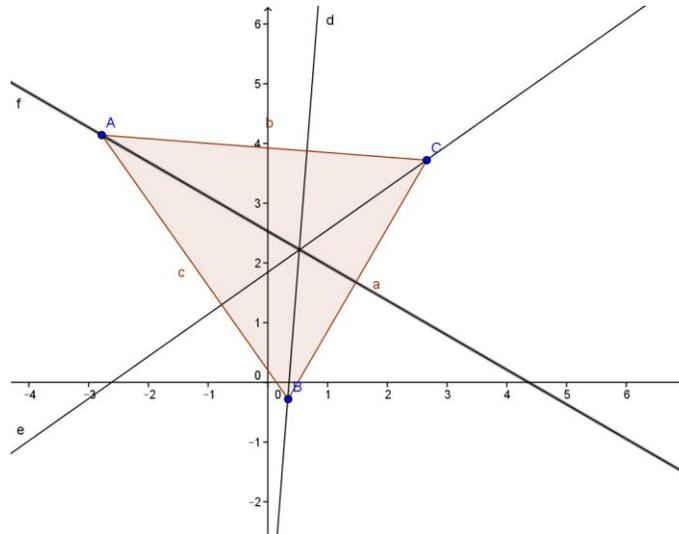


Altura

La *altura* de un triángulo es la perpendicular que se traza sobre un lado del triángulo hacia el vértice que se opone.

El punto donde se interceptan las tres alturas del triángulo se llama *ortocentro*, y éste puede o no, quedar al interior del triángulo.

En la siguiente figura se muestran las alturas de un triángulo.

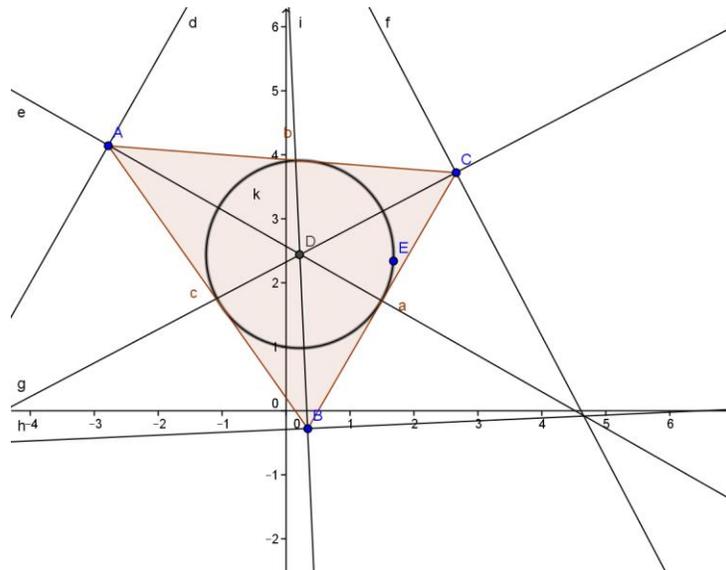


Bisectriz

La *bisectriz*, se refiere a la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales (es decir, lo divide justo por la mitad).

En un triángulo, el punto de concurrencia de las bisectrices se llama *incentro*, y representa en centro de una circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo, es decir, una circunferencia inscrita en el triángulo.

El incentro debe quedar al interior del triángulo. En la figura inferior, se muestran las bisectrices en un triángulo.



Ejercicio Realiza cuadro sinóptico sobre las rectas y puntos notables del triángulo.

Completa la siguiente tabla con la información que falta sobre las rectas y puntos notables del triángulo.

RECTA NOTABLE	CARACTERISITICAS	FÓRMULAS ANALITICAS	PUNTO NOTABLE	BOSQUEJO
Mediatriz	Perpendicular en el punto medio de cada lado	$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	Circuncentro	
Bisectriz			Incentro	
	Perpendicular hacia el vértice que se opone			
		$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $P(x_1, y_1)$		

D Ecuaciones de las mediatrices, medianas, y alturas

Ecuación de las mediatrices

Para establecer las ecuaciones de las mediatrices, es preciso conocer las pendientes de las rectas perpendiculares a los lados del triángulo y el punto medio de cada lado.

Ejemplo Sea el triángulo formado por los puntos A(1,1) B(3,5) y C(6,2), determinar las ecuaciones de las mediatrices y realizar la gráfica correspondiente.

Solución:

Se necesitan calcular las pendientes AB, AC y BC, a fin de obtener las pendientes perpendiculares

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

$$m_{AB} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{AC} = \frac{2 - 1}{6 - 1} = \frac{1}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{2 - 5}{6 - 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Una vez que se tienen las pendientes de cada lado, para cada una se debe obtener la pendiente de la perpendicular:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

De este modo

$$m_{\perp AB} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{\perp AC} = -\frac{1}{\frac{1}{5}} = -5$$

$$m_{\perp BC} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Ahora se calcularán los puntos medios de cada lado del triángulo con vértices A(1,1) B(3,5) y C(6,2)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

P_{mAB} :

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$y = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$P_{mAB}(2,3)$

P_{mAC} :

$$x = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$P_{mAC}(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

P_{mBC} :

$$P_{mBC}\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$x = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{5 + 2}{2} = \frac{7}{2}$$

Además, es importante recordar la forma de la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Luego, en el lado AB, la ecuación de la recta mediatriz es:

$$P_{mAB}(2,3), m_{\perp AB} = -\frac{1}{2}$$

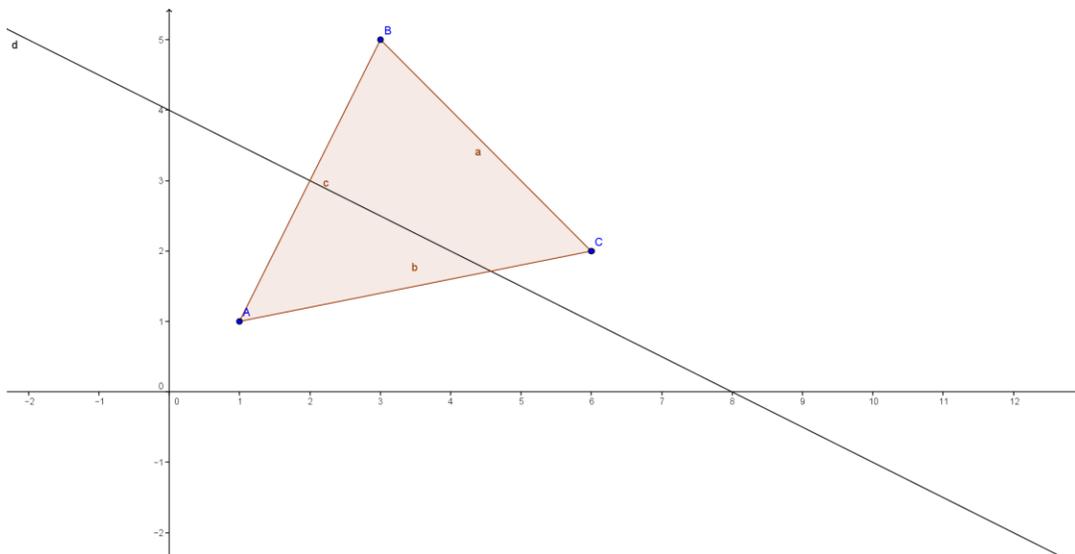
$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Además la ecuación general de la mediatriz en el lado AB, es $x + 2y - 8 = 0$

Ejercicios

¿Cuáles son las ecuaciones de la recta para los lados AC y BC?

Una vez que hayas determinado las ecuaciones de las mediatrices de los lados AC y BC, represéntalas en la siguiente gráfica.



¿Las tres rectas coinciden en un solo punto? _____

Si la respuesta es NO, deberías revisar nuevamente la gráfica de la ecuación.

Si la respuesta es SI, usa tu compás y ábrelo hacia uno de los vértices y traza una circunferencia.

¿La circunferencia pasa por los tres vértices? _____

Si es así, el punto en el que se han interceptado las mediatrices es el circuncentro, y como lo has presenciado, es el centro de una circunferencia circunscrita.

Ecuación de las medianas

Para establecer las ecuaciones de las medianas, es preciso conocer el punto medio de cada lado del triángulo, y las coordenadas de los vértices que se oponen a los lados.

Ejemplo Sea el triángulo formado por los puntos A(1,1) B(3,5) y C(6,2), determinar las ecuaciones de las medianas y realizar la gráfica correspondiente.

Solución:

Se calcularán los puntos medios de cada lado del triángulo con vértices A(1,1) B(3,5) y C(6,2)

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$P_{mAB}: \quad x = \frac{1+3}{2} = 2 \quad y = \frac{1+5}{2} = 3$$

$P_{mAB}(2,3)$

P_{mAC} :

$$x = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \quad y = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$P_{mAC}\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$P_{mBC}: \quad x = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} \quad y = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

$P_{mBC}\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Además, es importante recordar la forma de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Luego, el lado AB se opone al vértice C, y con esto, la ecuación de la recta mediana considerando el punto medio de ese lado $P_{mAB}(2,3)$ y el vértice opuesto C(6,2)

$$y - 3 = \frac{2 - 3}{6 - 2} (x - 2)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{4} (x - 2)$$

Además la ecuación general de la mediana en el lado AB, es $x + 4y - 10 = 0$

Ejercicios

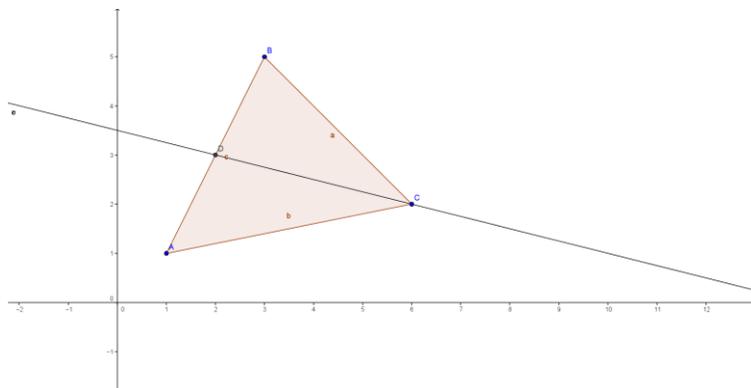
¿Cuáles son las ecuaciones de la mediana para los lados AC y BC?

Una vez que hayas determinado las ecuaciones de las medianas de los lados AC y BC, represéntalas en la siguiente gráfica.

¿Las tres rectas coinciden en un solo punto? _____

Si la respuesta es NO, deberías revisar nuevamente la gráfica de la ecuación.

El punto donde concurren las tres medianas en el triángulo es el gravicentro o baricentro y representa el punto de equilibrio de ese triángulo



Ecuación de las alturas

Para establecer las ecuaciones de las alturas, es preciso conocer la pendiente de la recta perpendicular a cada lado del triángulo, y las coordenadas de los vértices que se oponen a los lados.

Ejemplo Sea el triángulo formado por los puntos A(1,1) B(3,5) y C(6,2), determinar las ecuaciones de las alturas y realizar la gráfica correspondiente.

Solución:

Se necesitan calcular las pendientes AB, AC y BC, a fin de obtener las pendientes perpendiculares

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

$$m_{AB} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{AC} = \frac{2 - 1}{6 - 1} = \frac{1}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{2 - 5}{6 - 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Una vez que se tienen las pendientes de cada lado, para cada una se debe obtener la pendiente de la perpendicular:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

De este modo

$$m_{\perp AB} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{\perp AC} = -\frac{1}{\frac{1}{5}} = -5$$

$$m_{\perp BC} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Además, es importante recordar la forma de la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Luego, el lado AB se opone al vértice C, y con esto, la ecuación de la altura considerando la pendiente de la recta perpendicular al lado AB y el vértice opuesto C(6,2)

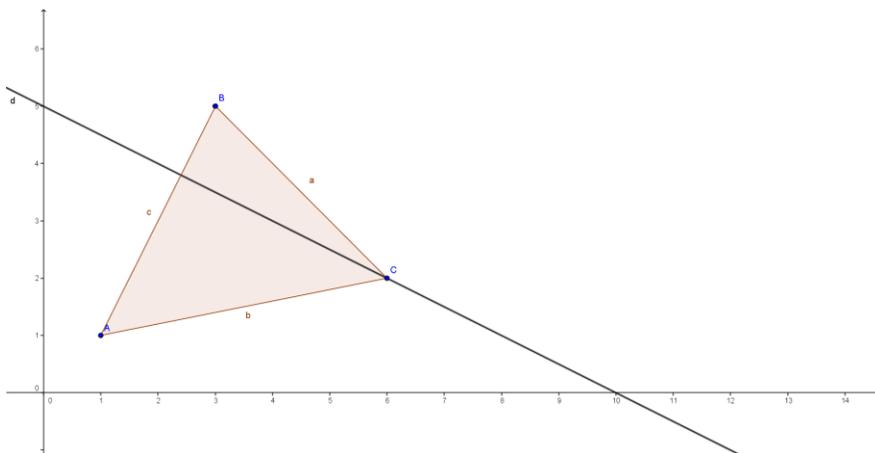
$$y - 2 = \frac{-1}{2}(x - 6)$$

Además la ecuación general de la altura en el lado AB, es $x + 2y - 10 = 0$

Ejercicios

¿Cuáles son las ecuaciones de las alturas para los lados AC y BC?

Una vez que hayas determinado las ecuaciones de las alturas de los lados AC y BC, represéntalas en la siguiente gráfica.



¿Las tres rectas coinciden en un solo punto? _____

Si la respuesta es NO, deberías revisar nuevamente la representación gráfica de la ecuación.

El punto donde concurren las tres alturas se llama ortocentro.

E Circuncentro, baricentro (gravicentro) y ortocentro

Ya hemos dicho que el punto de intersección de las mediatrices se llama circuncentro. Para determinar las coordenadas de este punto notable, se determina la intersección entre las rectas dadas por las ecuaciones de la mediatriz en un triángulo dado.

Retomaremos el triángulo que hemos estudiado, cuyas coordenadas son A(1,1), B(3,5) y C(6,2)

Luego, las ecuaciones de las mediatrices son:

$$\text{Lado AB: } x + 2y - 8 = 0$$

$$\text{Lado AC: } 5x - y + 19 = 0$$

$$\text{Lado BC: } x - y - 1 = 0$$

Luego, al resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, seleccionando dos ecuaciones de las mediatrices, por ejemplo, las de los lados AB y AC, se tiene que la solución (por cualquier método) es:

$$x + 2y - 8 = 0$$

$$5x - y + 19 = 0$$

$$x = 10/3, \quad y = 7/3$$

y para comprobar estos resultados es necesario sustituir en la ecuación del lado BC (que fue la que no seleccionamos para establecer el sistema).

$$x - y - 1 = 0$$

$$\frac{10}{3} - \frac{7}{3} - 1 = 0$$

$$\frac{3}{3} - 1 = 0$$

De donde $0 = 0$.

Luego, se puede garantizar que las coordenadas del circuncentro son $(10/3, 7/3)$

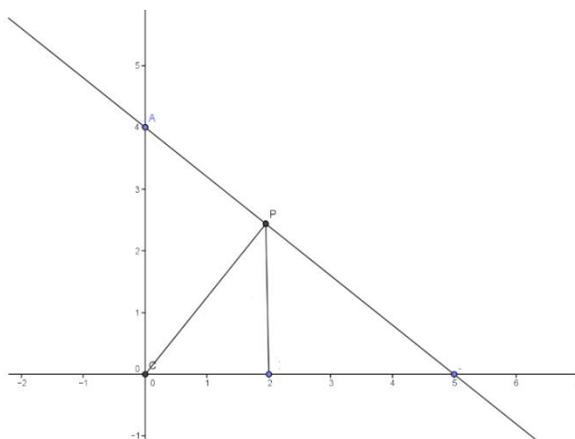
Ejercicios

Determina las coordenadas para el gravicentro (o baricentro) y las coordenadas del ortocentro, para las medianas y alturas de ese triángulo.

F Forma normal de la ecuación de la recta.

La recta L queda determinada por la longitud de su perpendicular trazada desde el origen y el ángulo positivo w , perpendicular que se forma con el eje horizontal.

Observa la figura:



La perpendicular PO a la recta L, que se representa con p, es positiva, ya que se trata de una distancia.

El ángulo w, formado por PO está entre 0° y 360° , es decir $0 \leq w < 360^\circ$.

Al asignarse valores a p y w, la recta L queda determinada por la ecuación de la recta en su forma normal, que es:

$$x \cos w + y \sin w - p = 0$$

Ejemplo Determina la ecuación de la recta en su forma normal con $w = 30^\circ$ y $p = 5$.

Se sustituye en $x \cos w + y \sin w - p = 0$, entonces, $x \cos 30 + y \sin 30 - 5 = 0$, pero como $\sin 30 = \frac{1}{2}$ y $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se puede tener:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$$

Multiplicando la expresión anterior por 2, queda:

$$\sqrt{3}x + y - 10 = 0$$

Dada la forma general de una recta, establecer su forma normal

Para ello se debe considerar la siguiente fórmula:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Para elegir el signo de $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, se deben considerar:

1. El signo del radical debe ser contrario al signo que tiene C.
2. Si $C = 0$, $A \neq 0$ y $B \neq 0$, entonces el signo del radical será el que tiene B
3. Si $C = B = 0$, entonces el signo del radical será el signo que tiene A.

Ejemplo Determina la forma normal de la recta $3x + 4y - 5 = 0$, así como los valores de p, w y trazar la

gráfica correspondiente.

Se sustituye en

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} + \frac{4y}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} - \frac{5}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{25}} + \frac{4y}{\pm\sqrt{25}} - \frac{5}{\pm\sqrt{25}} = 0$$

En este caso el signo del será el signo de C, o sea negativo.

Entonces:

$$\frac{3x}{-5} + \frac{4y}{-5} - \frac{5}{-5} = 0$$

Es decir

$$-\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} + 1 = 0$$

De donde:

$$\cos w = -\frac{3}{5} = 126.89^\circ$$

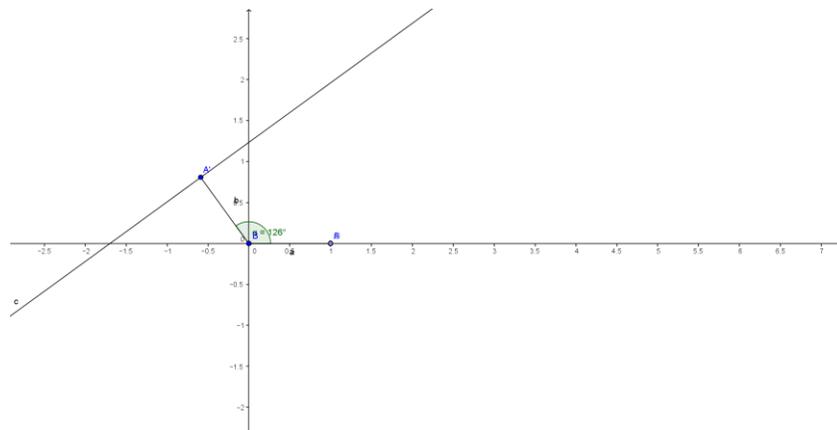
$$\text{Sen} w = -\frac{4}{5} = -53.13^\circ = 126.89^\circ$$

Y además $p = 1$

Luego la ecuación de la recta en su forma normal es

$$\cos 126.89^\circ + \text{sen} 126.89^\circ + 1 = 0$$

Gráficamente:



Ejercicios

Dados los valores de p y w que se indican, determina la ecuación de la recta en su forma normal y general y realiza la gráfica correspondiente

1. $p = 2, w = 60^\circ$
2. $p = 4, w = 30^\circ$
3. $p = 1, w = 45^\circ$
4. $p = 6, w = 15^\circ$
5. $p = 8, w = 57^\circ$

1. Dada la ecuación general de la recta $4x + 3y - 10 = 0$, determina la forma normal y los valores de p y w . Graficar.
2. Dada la ecuación general de la recta $5x + 2y = 0$, determina la forma normal y los valores de p y w . Graficar.

G Distancia de un punto a una recta

Se toma como base la relación

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Que es la relación para obtener la distancia dirigida entre un punto y una recta.

En este caso, el signo del radical, se debe considerar el signo que tiene el coeficiente de B .

- a) Si la distancia obtenida es negativa, el punto y el origen del plano cartesiano están del mismo lado de la recta.
- b) Si la distancia es positiva, el punto y el origen del plano cartesiano están en distintos lados de la recta.

Ejemplo Determina la distancia dirigida entre el punto $(2,1)$ y la recta $4x + 3y - 2 = 0$ y señala

$$d = \frac{4(2) + 3(1) - 2}{+\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8 + 3 - 2}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{9}{5}$$

El signo de $+$ indica que el punto se ubica arriba de la recta.

Ejercicios

- a) Determina la distancia dirigida entre el punto $(-3,-5)$ y la recta $x + y - 7 = 0$ y señala.
- b) Determina la distancia dirigida entre el punto $(-2,-1)$ y la recta $3x - 2y + 9 = 0$ y señala.

H Ecuación de una bisectriz. Incentro

La *bisectriz* es de un ángulo, es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo. Es decir, es la recta que divide al ángulo en dos partes exactamente iguales.

Para obtener la ecuación de una bisectriz se deben considerar las distancias dirigidas d_1 y d_2 , para lo cual se debe considerar que si el punto P está debajo de L_1 , la distancia dirigida es $-d_1$, pero a su vez está encima de L_2 , por lo que la distancia dirigida será d_2 entonces, $-d_1=d_2$.

De modo análogo, si el punto P está encima de L_1 , la distancia dirigida es d_1 , pero a su vez está abajo de L_2 , por lo que la distancia dirigida será d_2 entonces, $d_1=-d_2$.

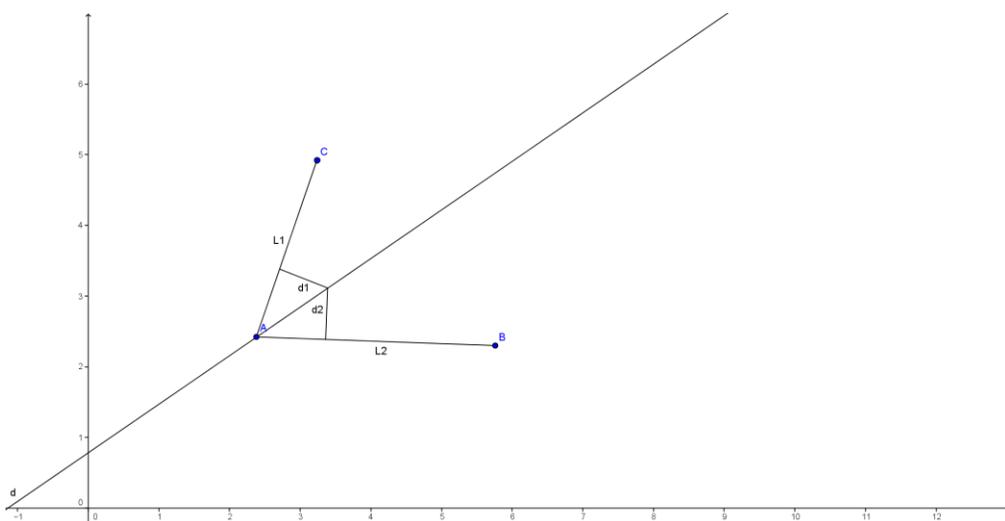
Por esa razón se puede emplear $-d_1 = d_2$ o $d_1 = -d_2$. Es decir:

Como

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Entonces:

$$\frac{A_1x + B_1y + C}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$



En un triángulo, las ecuaciones de las bisectrices se dan en cada uno de los ángulos que se requieren bisectar.

Ejemplo

Tomaremos nuevamente el triángulo conocido A(1,1) B(3,5) y C(6,2), y determinaremos la bisectriz en el ángulo A.

Solución:

Se requieren conocer las ecuaciones de los lados AB y AC y aplicar la relación

$$-d_1 = d_2 \text{ o } d_1 = -d_2$$

Para obtener las ecuaciones de los lados del triángulo se usa la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se transforma a la forma general. Entonces, las ecuaciones de los lados del triángulo ABC:

Lado AB: $x - 5y + 4 = 0$

Lado AC: $2x - y - 1 = 0$

Lado BC: $x + y - 8 = 0$

Así, tomamos las ecuaciones de los lados AB y AC y las sustituimos en la fórmula

$$\frac{A_1x + B_1y + C}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2 + B_2 + C}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Si asignamos como L_1 al lado AC y L_2 al lado AB, el punto P está debajo de L_1 y a su vez está encima de L_2 de P, la distancia dirigida será d_2 entonces, $-d_1 = d_2$.

Es así que la fórmula queda:

$$-\frac{A_1x + B_1y + C}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2 + B_2 + C}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Sustituyendo los valores: lado AB: $x - 5y + 4 = 0$ y lado AC: $2x - y - 1 = 0$

$$-\frac{x - 5y + 4}{-\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{2x - y - 1}{-\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

De donde:

$$\frac{x - 5y + 4}{\sqrt{26}} = -\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}}$$

Al simplificar se tiene:

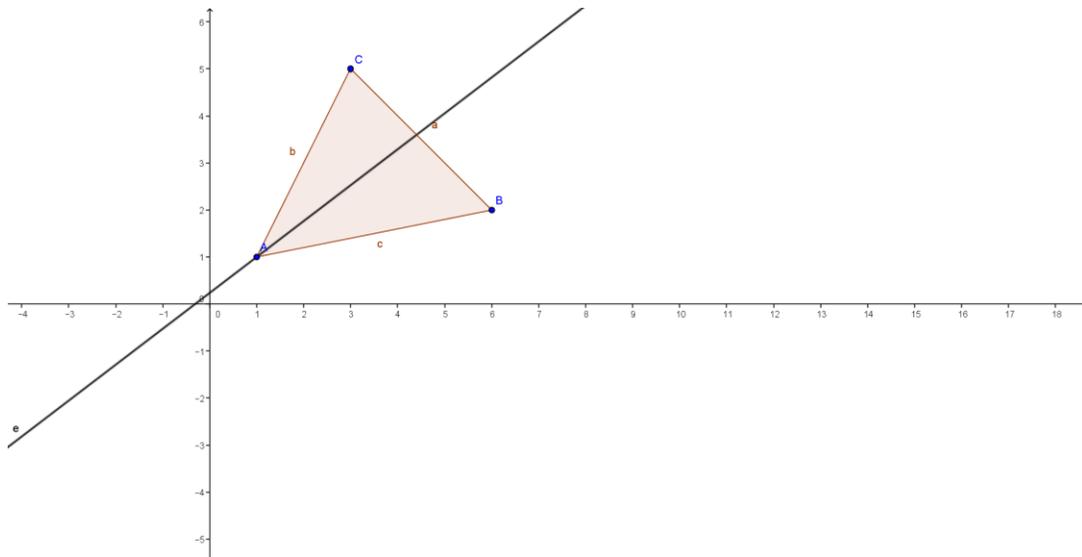
$$\sqrt{5}x - 5\sqrt{5}y + 4\sqrt{5} = -2\sqrt{26}x + \sqrt{26}y + \sqrt{26}$$

O sea:

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{26})x - (5\sqrt{5} + \sqrt{26})y + 4\sqrt{5} - \sqrt{26} = 0$$

Aproximadamente $12.43x - 16.28y - 3.85 = 0$

Donde la gráfica queda representada como



Ejercicios

Encuentra las ecuaciones de las bisectrices para los vértices B y C, y represéntalas sobre la gráfica anterior.

¿Las tres rectas coinciden en un solo punto? _____

Si la respuesta es NO, deberías revisar nuevamente la gráfica de la ecuación.

Si tu respuesta es SÍ, toma tu compás y ábrelo de modo que sea tangente a uno de los lados. ¿Es tangente a los tres lados?

El punto donde concurren las tres bisectrices en el triángulo se llama incentro y representa el centro de una circunferencia inscrita, en la que tres lados del triángulo son tangentes a dicha circunferencia.

INCENTRO

Para calcular las coordenadas del incentro, basta con que se resuelva el sistema de ecuaciones de las tres bisectrices, tomando primero dos ecuaciones para encontrar posibles valores para x y y , y luego sustituirlos en la otra ecuación de la bisectriz a manera de comprobación.

Cabe comentar que los resultados en este caso serán aproximados en virtud de que al trabajar con las distancias, se generaron números irracionales, de los cuales en la gráfica tendíamos aproximaciones.

Ejercicio

Con lo expuesto anteriormente, determina las coordenadas aproximadas del incentro del triángulo $A(1,1)$ $B(3,5)$ y $C(6,2)$.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 3

1. Siendo el ángulo de inclinación de 30° y la longitud del segmento normal a una recta de 5 unidades:
 - a. Establecer la ecuación de la recta en forma normal, de manera trigonométrica.
 - b. Transforma esa ecuación a la forma normal de la recta de manera algebraica.
 - c. Realiza la gráfica de esa recta (considerando la normal)

2. Sea el triángulo $A(-2,3)$ $B(3,6)$ $C(4,-1)$:
 - a. Realiza la gráfica del triángulo.
 - b. Determina las pendientes de los lados del triángulo.
 - c. Determina las pendientes de las rectas perpendiculares a los lados del triángulo.
 - d. Establece las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo.
 - e. Escribe las ecuaciones generales de las mediatrices del triángulo ABC.
 - f. Encuentra las coordenadas (x,y) del punto de intersección de las mediatrices.
 - g. Escribe el nombre de ese punto de intersección: _____
 - h. Sobre la gráfica del triángulo, realiza la gráfica de las rectas mediatrices (usa un solo color para todas estas rectas).
 - i. Traza la circunferencia circunscrita.
 - j. Sobre el lado AB traza, con un color diferente al usado para las mediatrices, la altura correspondiente.
 - k. Escribe la ecuación de esa altura (en AB)
 - l. Sobre BC traza, con otro color diferente al de las mediatrices y la altura, la mediana correspondiente.
 - m. Escribe la ecuación de la mediana en el lado BC.